

Tag 1

Aufgabe 1 :

Im Folgenden gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Finde die Eigenwerte von A .
- (b) Finde die dazugehörigen Eigenvektoren.
- (c) Diagonalisiere die Matrix A .
- (d) Berechne A^8 .
- (e) Berechne e^A .

Solution:

- (a) Wir berechnen und setzen:

$$\det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Es gilt also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

- (b) Wir finden zunächst einen passenden Eigenvektor zu λ_1 :

$$A_1^* = A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir finden die Lösungen von $A_1^* v_1 = 0$ und erhalten den Eigenvektor

$$v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $t = 1$ und erhalten:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wiederholen diesen Prozess für $\lambda_2 = -2$ und erhalten den Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man beachte hierbei, dass es unendlich viele Lösungen. Denn jedes Vielfache von diesem Vektor ist eine Lösung.

(c) Wir erhalten

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen noch T^{-1} mit unsere Formel und erhalten:

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Unsere Diagonalisierung ist dann

$$A = TDT^{-1}$$

(d) Es gilt

$$A^8 = TD^8T^{-1}$$

wobei

$$D^8 = \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix} = 2^8 E_2$$

und somit

$$\begin{aligned} A^8 &= TD^8T^{-1} \\ &= T \cdot 2^8 E_2 \cdot T^{-1} \\ &= 2^8 TT^{-1} \\ &= 2^8 E_2 \\ &= \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) Es ist

$$e^A = Te^DT^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{1}{4 \cdot e^2} \begin{pmatrix} 3e^4 + 1 & -e^4 + 1 \\ -3e^4 + 3 & e^4 + 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 :

Ist die folgende Matrix diagonalisierbar? Falls ja, diagonalisiere sie. Falls nein, wieso nicht?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: Sie ist nicht diagonalisierbar. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 1$. Der Eigenvektor-Raum (Eigenraum) von $\lambda_{1,2}$ ist

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir haben zwei Eigenwerte, aber nur einen Eigenvektor gefunden. Also ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3 :

Sei das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimme die Basis des Lösungsraums dieser DGL.
- (b) Zeige, dass die Spaltenvektoren von A eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Solution:

- (a) Wir wissen, dass die Basis des Lösungsraums gegeben ist durch die Spaltenvektoren der Exponentialmatrix e^{tA} . Weiter ist A eine Jordannormalform mit zwei Jordanblöcken der Länge 2 und 1:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = (2)$$

Es gilt offensichtlich $e^{tJ_2} = e^{2t}$ und aus der Vorlesung ist bekannt:

$$e^{tJ_1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$e^{tA} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Die Spalten bilden die Basis des Lösungsraumes.

- (b) Die Determinante von A ist $\det(A) = 2 \neq 0$. Somit sind die Spaltenvektoren linear unabhängig. Wir haben nun genau drei Vektoren aber auch einen dreidimensionalen Vektorraum ($\dim(\mathbb{R}^3) = 3$). Somit bilden die Spaltenvektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$.