

Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

Somit überprüfen wir zunächst die Ableitung der ersten Teilfunktion ($f_1(x) = e^{-\frac{1}{x}}$) und zeigen, dass diese gegen 0 strebt für $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \searrow 0} f'_1(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Es gilt zwar $\lim_{x \searrow 0} e^{-1/x} \rightarrow 0$ und $\lim_{x \searrow 0} x^2 \rightarrow 0$, aber $e^{-1/x}$ fällt für $x \rightarrow 0$ viel schneller ab als x^2 . Als Beispiel: für $x = 0.01$ haben wir bereits

$$e^{-\frac{1}{0.01}} \approx 0.00...04$$

mit 43 Nullen nach dem Komma! Als Vergleich: für x^2 gilt $0.01^2 = 0.0001$ (mit mickrigen 3 Nullen nach dem Komma). Weil eben $e^{-\frac{1}{x}}$ für $x \rightarrow 0$ also viel schneller klein wird als x^2 erhalten wir

$$\lim_{x \searrow 0} f'_1(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$$

Ähnlich vorgehen können wir bei $e^{1/x}$, da hier der Grenzwert von der linken Seite genommen wird und wir somit das exakte Gleiche erhalten werden.